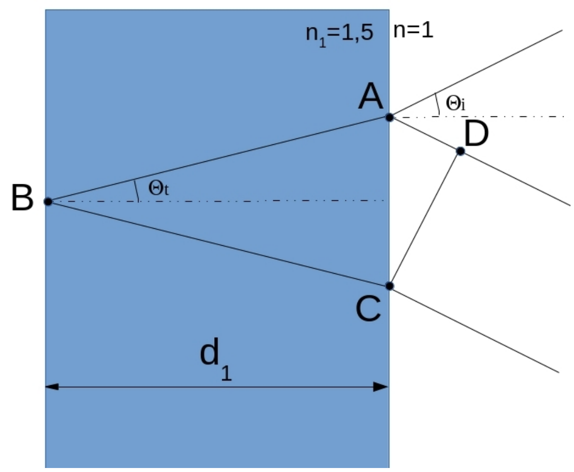

Figure 1: *Afleiding faseverschuiving eerste laag.*

Uitwerking- Het knikkerbesraadsel

1. (a) Als de punten C en D in fase zijn, zal er constructieve interferentie optreden [1]. Het verschil in optische padlengte Λ_{CD} is (zie figuur 1)

$$\Lambda_{CD} = n_1(AB + BC) - AD = \frac{2n_1 d_1}{\cos(\theta_t)} - AD. \tag{1}$$

Voor AD kunnen we schrijven

$$AD = AC(\sin(\theta_i)) = AC(n_1 \sin(\theta_t)), \tag{2}$$

waarbij (naast eenvoudige goniometrie) gebruik gemaakt is van de wet van Snellius. Verder valt uit de figuur af te leiden dat

$$AC = 2d_1 \tan(\theta_t). \tag{3}$$

Er volgt hieruit dat

$$\Lambda = \frac{2n_1 d_1}{\cos\theta_t}(1 - \sin^2(\theta_t)) = 2n_1 d_1 \cos\theta_t, \tag{4}$$

of uitgedrukt als faseverschil δ

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Lambda = \frac{4\pi n_1 d_1 \cos\theta_t}{\lambda}, \tag{5}$$

waarbij λ de golflengte is in lucht. We zijn nu nog één ding vergeten. Als licht reflecteert aan een laag met een hogere brekingsindex, dan levert dit een fasensprong op van π. Denk hierbij aan een lopende golf in een koord: reflectie aan een vast uiteinde levert een fasensprong van π op, reflectie aan een open uiteinde niet. De reflectie in B levert dus geen fasensprong op, reflectie in A wel. Voor het totale faseverschil geldt dus nu

$$\delta = \frac{4\pi n_1 d_1 \cos\theta_t}{\lambda} - \pi, \tag{6}$$

waarbij het in principe niet uitmaakt of je π erbij optelt of aftrekt. Er vindt constructieve interferentie plaats als de punten C en D in fase trillen, dus als $\delta = m(2\pi)$, met m een geheel getal. Dus voor constructieve interferentie moet gelden voor θ_t

$$\cos(\theta_t) = (2m+1)\frac{\lambda}{4n_1 d_1}, \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \quad . \tag{7}$$

Er vindt dus constructieve interferentie plaats als aan vergelijking (7) is voldaan. De gevraagde invalshoek θ_i volgt uit de wet van Snellius (met $n_{lucht} = 1$)

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin\theta_t. \tag{8}$$

Het getal m moet heeltallig zijn, maar er gelden nog twee restricties:

i. $0 \leq \cos(\theta_t) \leq 1$;
ii. $0 \leq \sin(\theta_i) \leq 1$.

Uit de eerste restrictie volgt ($0 \leq m \leq 19$). De tweede restrictie beperkt m verder tot ($15 \leq m \leq 19$). Er blijven vijf mogelijkheden over:

i. $m = 15 \rightarrow \theta_t = 39,2^\circ \rightarrow \theta_i = 71,4^\circ$;
ii. $m = 16 \rightarrow \theta_t = 34,4^\circ \rightarrow \theta_i = 58,0^\circ$;
iii. $m = 17 \rightarrow \theta_t = 29,0^\circ \rightarrow \theta_i = 46,6^\circ$;
iv. $m = 18 \rightarrow \theta_t = 22,3^\circ \rightarrow \theta_i = 34,7^\circ$;
v. $m = 19 \rightarrow \theta_t = 12,8^\circ \rightarrow \theta_i = 19,5^\circ$.

(b) Als de punten H en G in fase trillen, treedt uiteraard ook constructieve interferentie op (zie figuur 2). Hetzelfde geldt voor

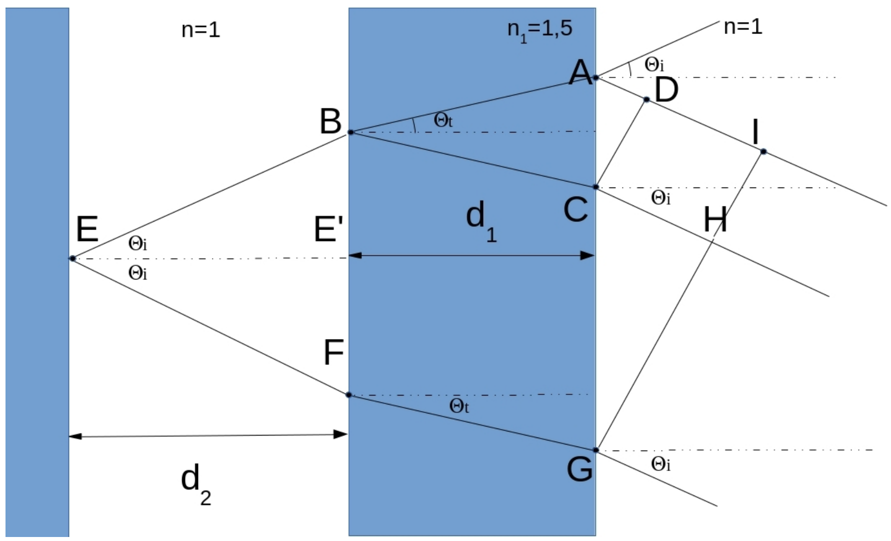

Figure 2: *Afleiding faseverschuiving meerdere lagen.*

punten G en I. We werken nu alleen de situatie voor H en G uit. Voor het verschil in optische padlengte tussen punt H en G geldt

$$\Lambda_{HG} = n_1 AB + BE + EF + n_1 FG - n_1 AB - n_1 BC - CH. \quad (9)$$

Uit de figuur valt ook te halen dat:

$$n_1 BC = n_1 FG, \quad (10)$$

waardoor (9) te vereenvoudigen is tot

$$\Lambda_{HG} = BE + EF - CH \quad (11)$$

of

$$\Lambda_{HG} = \frac{2d_2}{\cos(\theta_i)} - CH. \quad (12)$$

Voor CH kunnen we schrijven

$$CH = CG \sin(\theta_i). \quad (13)$$

Aangezien

$$CG = BF = 2d_2 \tan(\theta_i), \quad (14)$$

kunnen we voor CH schrijven

$$CH = 2d_2 \tan(\theta_i)\sin(\theta_i), \tag{15}$$

en volgt dus voor Λ_{HG}

$$\Lambda_{HG} = \frac{2d_2}{\cos(\theta_i)} - 2d_2 \tan(\theta_i)\sin(\theta_i), \tag{16}$$

wat te vereenvoudigen is tot

$$\Lambda_{HG} = 2d_2 \cos(\theta_i). \tag{17}$$

Nu nog controleren hoeveel fasensprongen er onderweg hebben plaatsgevonden. Er vindt maar ééńmaal een fasensprong van π plaats, nl. in punt E. Er treedt dus constructieve interferentie op als

$$\delta_{HG} = m(2\pi) = \frac{2\pi}{\lambda}\Lambda_{HG} - \pi, \tag{18}$$

oftewel

$$\cos(\theta_i) = (2m+1)\frac{\lambda}{4d_2} \qquad m = 0, 1, 2, 3, ...17, \tag{19}$$

en niet geheel onverwacht lijken formules (19) en(7) sterk op elkaar. Je had formule (19) ook in één keer kunnen zien, aangezien zowel het pad naar G als naar H tweemaal door laag d_1 gaat en deze laag doet er dus voor dit faseverschil niet toe. Het resultaat is een nieuwe reeks invalshoeken die tot constructieve interferentie leiden

i. m=0; $\theta_i = 88,39°$;
ii. m=1; $\theta_i = 85,16°$;
iii. m=2; $\theta_i = 81,92°$;
iv. m=....
v. m=17; $\theta_i = 10,15°$.

Bij $m = 17$ breekt de reeks af, omdat een cosinus niet groter dan 1 kan worden. In de praktijk zullen hogere ordes vanwege gebrek aan coherentie minder duidelijk constructief interfereren. Blauwe licht ($\lambda = 450$ nm) geeft dus voor een reeks dicht op elkaar liggende invalshoeken constructieve inferentie.

(c) Een multilaag zoals hier weergegeven geeft geen solide verklaring voor de homogeen waargenomen kleur. Je kunt een andere brekingsindex kiezen, je kunt de diktes anders kiezen, maar een echte oplossing voor het probleem levert dit niet op. Als we een multilaag met een evenwijdige bundel wit licht beschijnen (met invalshoek $\theta_i = 0$) en we willen dat $\lambda = 450$ nm reflecteert dan moet voor de diktes gelden

$$d_1 = \frac{\lambda}{4n} = 75,0 \text{ nm}; \; d_2 = \frac{\lambda}{4} = 112,5 \text{ nm}. \tag{20}$$

Onder hoeken $\theta_i \neq 0$ gaat licht van andere golflengtes meespelen en dus kan de kleur zo nooit echt homogeen blauw worden.

2. (a) Constructieve interferentie ontstaat als twee laagjes met evenwijdig georiënteerde microfibrillen in fase trillen. Er geldt dan voor de optische padlengte (voor $\theta_i = 0$)

$$\Lambda = 2 \cdot n \cdot p, \tag{21}$$

en als er geen sprake is van een netto fasensprong geldt voor de fase bij de maxima

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Lambda = m(2\pi), \tag{22}$$

met m weer een geheel getal. Voor $m = 1$ en dikte $d = p = 160$ nm wordt

$$\lambda = 2 \cdot n \cdot p = 2 \cdot 1,53 \cdot 145 \cdot 10^{-9} = 444 \text{ nm} \tag{23}$$

versterkt gereflecteerd, wat inderdaad blauw licht is.

(b) De microfibrillen zorgen ervoor dat alleen kleine hoeken van inval tot interferentie leiden. De structuur zorgt er tevens voor dat het gereflecteerde licht circulair gepolariseerd is. Als deze structuur wordt belicht met ongepolariseerd wit licht, is het gereflecteerde licht dus blauw, circulair gepolariseerd, en treedt alleen onder kleine hoeken uit. In het zichtbare spectrum kan zo alleen blauw constructief interfereren. Een bolvormig besje met deze structuur bekleed krijgt zo een homogeen blauwe kleur.

Literatuur

1. Voor achtergronden en afleiding: zie Hecht, Optics, Fourth Edition, par. 9.4.1, pp 402-404.