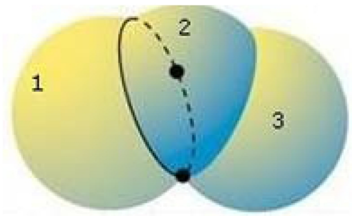


Figure 1: *De signalen van drie satellieten laten twee mogelijke posities over. Vier satellieten zijn dus voldoende voor eenduidige plaatsbepaling. Afkomstig uit: Zonder Einstein zouden we verdwalen, Prof. Dr. R. de Bruyn Ouboter (uitgave van het LION).*

# 1 Uitwerking- Positiebepaling met satellieten

1. In twee dimensies geeft de eerste toren je een positie op een cirkel met straal $r_1 = ct_1$. Een tweede toren geeft je een tweede cirkel met straal $r_2 = ct_2$. De cirkels snijden elkaar in twee punten. Hieruit volgt dat we in twee dimensies minstens drie torens nodig hebben voor een eenduidige plaatsbepaling. Twee torens zou voldoende kunnen zijn als we één van beide mogelijke posities kunnen verwerpen omdat ze te onwaarschijnlijk is.

2. Een desynchronisatie van $\Delta t = 1$ $\mu$s geeft al een fout in de positie van $c\Delta t \approx 300$ m.

3. In drie dimensies ligt het anders. Bij drie satellieten zijn er nog maar twee mogelijke posities over (zie figuur 1). Er zijn dus minimaal vier satellieten nodig om eenduidig je positie vast te leggen. Hier geldt ook weer: met drie satellieten lukt positiebepaling stiekem toch, omdat één van beide mogelijkheden te verwerpen is. Dit verwerpen is mogelijk omdat de gevraagde positie zich natuurlijk op het aardoppervlak moet bevinden. Daaraan voldoet één van beide oplossingen zeker niet.

4. De centripetale kracht wordt geleverd door de gravitatiekracht
$$\frac{GMm_s}{R_s^2} = \frac{m_s v^2}{R_s}. \tag{1}$$
Voor de baansnelheid geldt
$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2}$$

Combineren en vereenvoudigen levert

$$R_s = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}. \tag{3}$$

Met de omlooptijd $T$ gelijk aan 12 uur = 43200 s, de massa van de aarde $M = 5,976 \cdot 10^{24}$ kg en $G = 6,6726 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$ vind je $R_s = 2,661 \cdot 10^7$ m. De hoogte van de satelliet is dan $h = R_s - R_a =$ 20,24$\cdot 10^6$ m. Uit formule 2 volgt de baansnelheid $v_s = 3,870{\cdot}10^3\ \mathrm{ms}^{-1}$. De baansnelheid van een punt op het aardoppervlak $v_a = 4,633 \cdot 10^2$ $\mathrm{ms}^{-1}$.

5. Een schatting van de desynchronisatie per seconde is

$$\frac{\Delta t_s}{\Delta t_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}} = 1. + 8,22 \cdot 10^{-11}. \tag{4}$$

De klok aan boord van de satelliet loopt op basis van de speciale relativiteitstheorie dus iets langzamer dan een klok op aarde. Per 24 uur is dit $8,22 \cdot 10^{-11} \cdot 24 \cdot 3600 \approx 7\ \mu$s. Deze uitkomst is zeker niet verwaarloosbaar. Per 24 uur is de onnauwkeurigheid in de afstand op basis van dit effect ongeveer 2 km.

6. We vergelijken het 'echte' zwaartekrachtsveld veroorzaakt door de massa van de aarde met een 'schijnzwaartekrachtsveld' uit een draaibeweging. We beschouwen drie punten in het (echte) zwaartekrachtsveld van de aarde:

(a) oneindig ver verwijderd van de aarde $r = \infty$,

(b) een punt op de baan van de satelliet $r_{sat}$,

(c) een punt op het aardoppervlak $r_A$.

Deze drie punten hebben uiteraard 'equivalente' punten in een schijnzwaartekrachtsveld (uit een draaibeweging). Het punt $r = \infty$ is 'equivalent' met het middelpunt van de draaibeweging. De ontsnappingsnelheid is immers in beide gevallen nul. Een punt op de baan van de satelliet is 'equivalent' met een punt op een specifieke afstand verwijderd van het middelpunt van de draaibeweging met een ontsnappingsnelheid gelijk aan

$$v_{o,s} = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} = 5475\mathrm{ms}^{-1}. \tag{5}$$

Voor een punt op het aardoppervlak geldt

$$v_{o,a} = \sqrt{\frac{2GM}{R_a}} = 11188 \mathrm{ms}^{-1}, \tag{6}$$

waar ook weer een specifieke afstand tot het middelpunt bij hoort in het schijnzwaartekrachtsveld. In een draaiend systeem is de ontsnappingssnelheid gelijk aan de baansnelheid. Dus als de ontsnappingsnelheid toeneemt, neemt ook de tijdrek toe. Dit laatste moet volgens het equivalentieprincipe ook in het echte zwaartekrachtsveld gelden. De tijdrek in een punt oneindig ver verwijderd van de aarde is dus nul, de tijdrek in de baan van de satelliet is groter, maar op het aardoppervlak dus nog groter. Hieruit volgt dat de klok aan boord van de satelliet sneller loopt dan een klok op het aardoppervlak. Een klok oneindig ver verwijderd van de aarde loopt het snelst.

7. Voor de satelliet geldt voor de tijdrek t.o.v. een punt in het oneindige

$$\frac{\Delta t_s}{\Delta t_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_s c^2}}}, \tag{7}$$

en op het aardoppervlak geldt voor de tijdrek t.o.v. een punt in het oneindige

$$\frac{\Delta t_a}{\Delta t_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_a c^2}}}. \tag{8}$$

De vergelijkingen op elkaar delen levert

$$\frac{\Delta t_s}{\Delta t_a} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_a c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{R_s c^2}}} = 1. - 5,3 \cdot 10^{-10}. \tag{9}$$

De klok aan boord van de satelliet loopt dus sneller dan een klok op het aardoppervlak. Per 24 uur is dit $(5.3 \cdot 10^{-10}) \cdot 24 \cdot 3600$ s $= 46$ $\mu$s.

8. Algemene Relativiteit 'wint' het dus in dit geval van Speciale Relativiteit. Beide effecten samen zorgen ervoor dat de klok aan boord van de satelliet per 24 uur ongeveer 39 $\mu$s sneller loopt dan een klok op aarde.