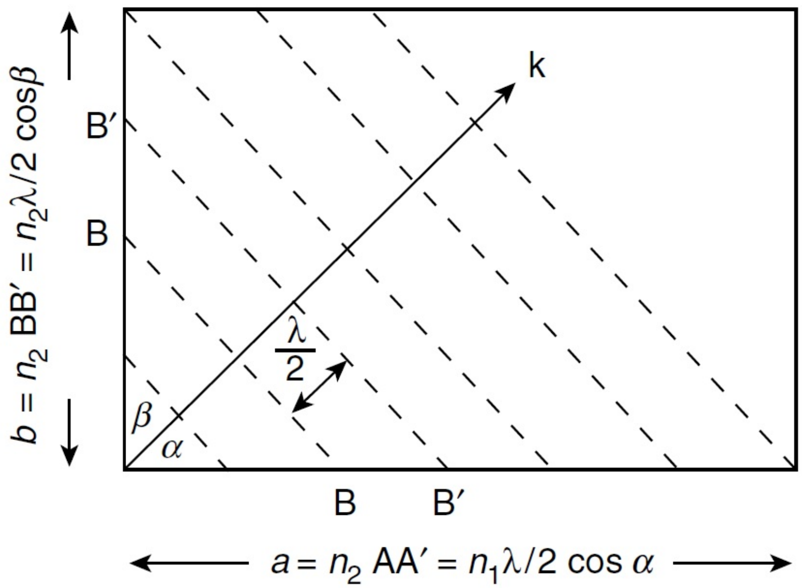
Uitwerkingen - Tamalin-drum



Figuur 1: *schematische weergave rechthoekig drumvel, met afmetingen a =60,0 cm en b =20,0 cm [1].*

1. De spanning T

$$T = \rho_a \cdot c^2, \tag{1}$$

hangt af van de gegeven oppervlaktedichtheid ρ_a = 2,10 kg/m^2 en de nog onbekende golfsnelheid c (m/s). We beginnen bij de golfvergelijking

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \nabla^2 u, \tag{2}$$

of anders geschreven

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}. \tag{3}$$

Als we ervan uitgaan dat x, y en t onafhankelijke variabelen zijn mogen we de oplossing van de golfvergelijking schrijven als een produkt van drie onafhankelijke oplossingen

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t), \tag{4}$$

waarbij de functie $T(t)$ natuurlijk niet verward moet worden met de spanning in het vel, maar een functie is die uitsluitend van de tijd afhangt. Als we de gekozen oplossing $u(x, y, y)$ tweemaal differentiëren (naar elke parameter x, y en t) en delen door $u(x, y, t)$ zelf dan vinden we

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}}{T}, \tag{5}$$

oftewel

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} - \frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}}{T} = 0. \tag{6}$$

waarbij de notatie X_{xx} betekent dat we $X(x)$ tweemaal naar x gedifferentieerd hebben, enz. Vergelijking 6 kan alleen voor elke combinatie (x,y,t) nul opleveren als de afzonderlijke termen constant zijn. We stellen elke term dus gelijk aan een constante, k_x^2, k_y^2 en k^2

$$\underbrace{\frac{X_{xx}}{X}}_{=k_x^2} + \underbrace{\frac{Y_{yy}}{Y}}_{=k_y^2} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}}{T}}_{=k^2} = 0. \tag{7}$$

met andere woorden

$$k_x^2 + k_y^2 - k^2 = 0, \tag{8}$$

en aangezien $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$ onafhankelijk zijn moet ook gelden dat $\frac{X_{xx}}{X}$, $\frac{Y_{yy}}{Y}$ en $T(t)$ gelijk zijn aan een constante

$$\frac{X_{xx}}{X} = k_x^2, \tag{9}$$

$$\frac{X_{xx}}{X} = k_y^2, \tag{10}$$

en

$$\frac{1}{c^2}\frac{T_{tt}}{T} = k^2. \tag{11}$$

We krijgen dus nu de volgende vergelijkingen

$$X_{xx} = X \cdot k_x^2, \tag{12}$$

$$Y_{yy} = Y \cdot k_y^2, \tag{13}$$

$$T_{tt} = T \cdot c^2 k^2. \tag{14}$$

De reden waarom we voor k^2 kiezen is dat k dan precies de fysische betekenis golfgetal $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ krijgt. Voor elk van deze drie vergelijkingen geldt dat de tweede afgeleide rechtevenredig is met haarzelf en dat kan alleen als

$$X(x) \propto e^{i(k_x \cdot x + \phi_x)}, \tag{15}$$

$$Y(y) \propto e^{i(k_y \cdot y + \phi_y)}, \tag{16}$$

en

$$T(t) \propto e^{i(ckt + \phi_t)}, \tag{17}$$

en dus kunnen de oplossing schrijven als

$$u(x, y, t) = A \cdot e^{i(k_x \cdot x + \phi_x)} \cdot e^{i(k_y \cdot y + \phi_y)} \cdot e^{i(kct + \phi_t)}. \tag{18}$$

We zijn alleen geïnteresseerd in het reële deel van $X(x), Y(y)$ en $T(t)$, en dus schrijven we

$$U(x, y, t) = \Re(X(x)) \cdot \Re(Y(y)) \cdot \Re(T(t)) \tag{19}$$

en dus

$$U(x, y, t) = \cos(k_x \cdot x + \phi_x) \cdot \cos(k_y \cdot y + \phi_y) \cdot \cos(kct + \phi_t), \tag{20}$$

waarbij $U(x, y, t)$ ook een oplossing is van de golfvergelijking. De fasen ϕ_x, ϕ_y en ϕ_t zijn steeds toegevoegd om ons de mogelijkheid te geven aan de randvoorwaarden te voldoen:

1. $U(0, y, t) = 0$ voor alle $(y, t) \rightarrow$ dit levert $\phi_x = \frac{\pi}{2}$,
2. $U(x, 0, t) = 0$ voor alle $(x, t) \rightarrow$ dit levert $\phi_y = \frac{\pi}{2}$,
3. $U(a, y, t) = 0$ voor alle $(y, t) \rightarrow$ dit levert $k_x = \frac{n_x \pi}{a}$,
4. $U(x, b, t) = 0$ voor alle $(x, t) \rightarrow$ dit levert $k_y = \frac{n_y \pi}{b}$,

met n_x en n_y gehele getallen. De fase ϕ_t zetten we gewoon op nul, we mogen immers beginnen wanneer we maar willen. Omdat we willen dat k de betekenis golfgetal $\frac{2\pi}{\lambda}$ krijgt schrijven we

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \tag{21}$$

waarmee we krijgen

$$\frac{2}{\lambda} = \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}}. \tag{22}$$

De mogelijke frequenties $f = \frac{c}{\lambda}$ die aan de randvoorwaarden voldoen zijn dus

$$f = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}}, \tag{23}$$

met n_x en n_y gehele getallen, 1,2,3,...
Pas nu we dit weten kunnen we de vragen beantwoorden. Een frequentie van 100 Herz, $n_x = n_y = 1$, en de afmetingen $a = 60{,}0$ cm en $b = 20{,}0$ cm invullen in vergelijking 23 geeft een golfsnelheid $c = 37{,}9(473)$ m/s.

1. De spanning T in het vel moet dan zijn

$$T = \rho_a \cdot c^2 = 3,02 \cdot 10^3 \text{ N/m}. \tag{24}$$

2. Modi (3,3) en (9,1) hebben dezelfde frequentie voor alle drumvellen waarvoor geldt $\frac{a}{b} = 3(,00..)$. Dit is direct te zien aan vergelijking 23. Dit is een interessant fenomeen: het zijn twee verschillende toestanden van het drumvel, maar ondanks dat hebben ze exact dezelfde frequentie. Dit fenomeen komt vaker in de natuur voor. Als we spreken van 'ontaarding' bij de energietoestanden van atomen, onderscheiden we ook twee electronenconfiguraties met hetzelfde energieniveau. Pas als we de atomen in een magneetveld plaatsen zien we dat de energieniveaus worden opgesplitst (Zeeman-effect).

Literatuur

1. The Physics of Vibrations and Waves, Sixt Edition, H. J. Pain, Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK, John Wiley & Sons, ISBN 0 470 01295 1.