Uitwerking: - De bungeejump

De differentiaalvergelijking kan worden geschreven als

$$mg + c\dot{y}(t) + k(y(t) - y_L) + m\ddot{y}(t) = 0 \tag{1}$$

en heeft dus als oplossing

$$y(t) = y_h(t) + y_e, \tag{2}$$

met $y_h(t)$ de oplossing van het homogene deel en y_e de evenwichtsstand van de gedempte oscillatie.

1. Laat zien dat

   $$y(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t) + y_e \tag{3}$$

   een oplossing is van differentiaalvergelijking 1 en bereken de constanten c, γ en ω en y_e.
   Als eerste stap kunnen we controleren of

   $$y_h(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t) \tag{4}$$

   een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking[1]

   $$m\ddot{y}_h(t) + c\dot{y}_h(t) + ky_h(t) = 0. \tag{5}$$

   We differentiëren vergelijking 4 naar t

   $$\dot{y}_h(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t) - \omega Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t), \tag{6}$$

   en differentiëren vervolgens nog een keer naar t

   $$\ddot{y}_h(t) = -\gamma^2 Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t) + \gamma A\omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t) + \omega\gamma Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t) - \omega^2 Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t). \tag{7}$$

   Vervolgens substitueren we deze vergelijkingen in de homogene differentiaalvergelijking (vergelijking 5) en schikken de termen

   $$Ae^{-\gamma t}\left[(m\gamma^2 - m\omega^2 - c\gamma + k)\cos(\omega t) + (2\omega\gamma m - c\omega)\sin(\omega t)\right] = 0. \tag{8}$$

   Vergelijking 8 moet op elk tijdstip gelden en dus ook op $t = 0$. Op dit tijdstip is $\sin(\omega t) = 0$ en dus moet gelden

   $$m\gamma^2 - m\omega^2 - c\gamma + k = 0. \tag{9}$$

[1] zie bijvoorbeeld Douglas C. Giancoli, vierde editie, deel 1, blz 444 voor de behandeling van een soortgelijk probleem.

De cosinus is nul op tijdstip $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Dan moet dus juist gelden dat

$$2\omega\gamma m - c\omega = 0 \tag{10}$$

en dus geldt

$$\gamma = \frac{c}{2m}. \tag{11}$$

Uit vergelijking 9, 10 en 11 volgt nu

$$\omega = \sqrt{\gamma^2 - \frac{c\gamma}{m} + \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}. \tag{12}$$

De massa m is gegeven en ook de veerconstante k, maar γ en c niet. Gelukkig kunnen we c berekenen als we bedenken dat er een snelheid v_e = -53,6 m/s bereikt zou worden op basis van alleen luchtwrijving (dus zonder bungeekoord). Hieruit volgt

$$mg + cv_e = 0 \rightarrow c = \frac{-mg}{v_e} = 14,6 \text{ kgs}^{-1}. \tag{13}$$

Nu c bekend is, volgt gelijk $\gamma = 9{,}15 \cdot 10^{-2}$ s^{-1}, en $\omega = 1{,}43$ s^{-1}. Nu is er nog een constante gevraagd, en dat is y_e, de evenwichtsstand van de gedempte oscillatie. Er geldt natuurlijk dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_e$ en verder $\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \lim_{t\to\infty} \ddot{y}(t) = 0$, omdat de trilling dan volledig is uitgedempt. De differentiaalvergelijking reduceert dan tot

$$mg + k(y_e - y_L) = 0 \rightarrow y_e = y_L - \frac{mg}{k}, \tag{14}$$

en aangezien $y_L = h - L_0$ volgt $y_e = h - L_0 - \frac{mg}{k} = 55{,}2$ m. Dit hadden we ook meteen kunnen zien, omdat als de oscillatie volledig is uitgedempt, er een krachtenevenwicht zich heeft ingesteld, waaruit ook onmiddelijk vergelijking 14 volgt.

2. Op welke hoogte is de snelheid van de bungeejumper maximaal en hoe groot is deze snelheid? Zolang tijdens het vallen $y > y_L$ geldt $k = 0$, en dus reduceert differentiaalvergelijking 1 tot

$$mg + c\dot{y}(t) + m\ddot{y}(t) = 0. \tag{15}$$

Vergelijking 15 heeft als oplossing

$$y(t) = -\frac{mg}{c}\left(\frac{m}{c}e^{-\frac{c\cdot t}{m}} + t\right) + y_c, \tag{16}$$

met $y_c = h + \frac{gm^2}{c^2}$. De constante y_c kan je vinden met de randvoorwaarde dat op $t = 0$ de hoogte h moet zijn. Een alternatieve strategie is als je eerst de oplossing voor $\dot{y}(t)$ hebt gevonden

$$\dot{y}(t) = v_e \left(1 - e^{(-\frac{c}{m}t)}\right) \tag{17}$$

met $v_e = -\frac{mg}{c}$ de eindsnelheid, en deze oplossing onbepaald integreert

$$y(t) = \int \dot{y}(t)dt. \tag{18}$$

De integratieconstante kun je ook nu weer vinden door de randvoorwaarde te stellen dat op $t = 0$ de hoogte h moet zijn. Allereerst geeft vergelijking 16 de relatie tussen y en t in het eerste deel van de sprong, voor $y_L < y(t) < h$. We kunnen nu uitrekenen op welk tijdstip y_L wordt bereikt door vergelijking 16 op te lossen[2], met $y(t) = y_L$. Je vindt het tijdstip $t_L = 2.15(17)$ s. Nu is de snelheid op hoogte y_L te bepalen met vergelijking 17. Je vindt v_L = 17,4(47) m/s. Voor $t > t_L$ is $y(t) < y_L$ en vanaf dat tijdstip begint de bungeejumper aan een gedempte oscillatie (vergelijking 3). De enige constante die we nog niet kennen van vergelijking 3 is de amplitude A. Die kunnen we vinden met de wet van behoud van energie. De veerenergie die wordt opgeslagen vanaf hoogte y_L tot aan de evenwichtstand y_e is $mg(y_L - y_e)$ en de kinetische energie bij aankomst in y_L bepalen de totale energie op tijdstip t_L

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(y_L - y_e), \tag{19}$$

waaruit volgt A = 13,8(869) m.

3. Op welke hoogte is de versnelling van de bungeejumper maximaal? De versnelling is maximaal in het laagste punt y_{min}. Daar is precies de cosinus uit vergelijking 3 gelijk aan -1, dus $t = \frac{\pi}{\omega}$. De hoogte is dan:

$$y_{min} = -Ae^{-\frac{\gamma\pi}{\omega}} + y_e, \tag{20}$$

waaruit volgt y_{min} = 43,8(807) m.

4. De gondel is dus gelukkig hoog genoeg. Zie vorige vraag.

[2]Met Wolfram Alpha oplossen:
Solve[-((m*g)/c)*((m/c) Exp[-((c*t)/m)] + t) + yc1 == yL, t]