De Uitdaging

Sijbrand de Jong en Ronald Kleiss

Uitwerkingen

Uitdaging 1:

De totale energie van het $p+p$ systeem is $E+mc^2$, waarbij E de energie van het bewegende proton is. De totale impuls van het systeem is die van het bewegende proton, laten we die $|\vec{p}|$ noemen. De totale invariante energie van het systeem volgt dan uit

$$E_{inv}^2 = \left(E + m_p c^2\right)^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = 2m_p c^2\left(E + m_p c^2\right)$$

omdat voor het bewegend proton geldt $E^2 - |\vec{p}|^2 = \left(m_p c^2\right)^2$. Omdat voor de drie proton plus antiproton eindtoestand E_{inv}^2 minstens $\left(4m_p c^2\right)^2$ moet zijn (als alle deeltjes in de eindtoestand ten opzichte van elkaar in rust zijn), vinden we dat de *minimum* energie van het proton $7m_p c^2$ moet bedragen. Omdat het proton sowieso een rustenergie van $m_p c^2$ heeft moet het Bevatron dus minstens $6m_p c^2 = 5628\,\mathrm{MeV}$ bijdragen. Het $ppp\bar{p}$ kluitje heeft een totale energie van $8m_p c^2$ en een invariante energie van $4m_p c^2$, dus een snelheid V gegeven door

$$E_{inv} = \frac{m_{inv} c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad 8m_p c^2 = \frac{4m_p c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(8m_p c^2\right)^2 = \frac{\left(4m_p c^2\right)^2}{\left(1 - V^2/c^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(8m_p c^2\right)^2\left(1 - V^2/c^2\right) = \left(4m_p c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V^2/c^2 = \frac{\left(8m_p c^2\right)^2 - \left(4m_p c^2\right)^2}{\left(8m_p c^2\right)^2}$$

zodat het systeem een snelheid van minstens $V = \sqrt{\frac{3}{4}}\,c \approx 0.87c$ heeft.

Uitdaging 2:

We gebruiken dezelfde formule als boven

$$E_{inv}^2 = \left(E + m_p c^2\right)^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = 2m_p c^2\left(E + m_p c^2\right),$$

alleen is de invariante energie nu $E_{inv} = E_{LHC} = 8 \times 10^6\,\mathrm{MeV}$. (merk op dat we hier $m_p c^2$ hebben verwaarloosd ten opzichte van E; dit mag omdat E zo groot is). De benodigde energie is daarmee $E \approx \frac{E_{LHC}^2}{2m_p c^2} \approx 3.4 \times 10^{10}\,\mathrm{MeV}$, volledig buiten het bereik van de hedendaagse technologie. De LHC geeft na 2014 een energie van

7 TeV (=7×10^6 MeV) aan protonen. Je hebt dus een versneller nodig die meer dan 5000 keer krachtiger is dan de LHC in 2015. Met LHC technologie zou die dan 135000 km in omtrek zijn, drie keer rond de aarde. Met nog te ontwikkelen magneten zou dat in de komende decennia een factor 2 korter kunnen worden, maar niet veel meer.

Uitdaging 3:

Met behulp van de constante van Boltzmann k_B berekenen we dat de typische energie van de fotonen $2.7\times 8.6\times 10^{-5}\text{ eV} \approx 2.3\times 10^{-4}\text{ eV}$ bedraagt, oftewel $2.3\times 10^{-10}\text{ MeV}$. Laten we dit bedrag E_γ noemen. Laat het proton energie E_p hebben en impuls p_p. Als proton en foton frontaal botsen is de totale energie E_{tot} dan gelijk aan $E_p + E_\gamma$ en de totale impuls p_{tot} gelijk aan $p_p - E_\gamma/c$. De totale invariante energie wordt weer gegeven door

$$E_{inv}^2 = E_{tot}^2 - p_{tot}^2 c^2 = \left(m_p c^2\right)^2 + 2E_\gamma\left(E_p + p_p c\right) \approx \left(m_p c^2\right)^2 + 4E_p E_\gamma .$$

Stellen we $E_{inv} = m_\Delta c^2$ gelijk aan de invariante energie van het Δ^+ deeltje dan vinden we

$$E_p = \frac{\left(m_{\Delta^+} c^2\right)^2 - \left(m_p c^2\right)^2}{4E_\gamma} \approx 7\times 10^{14}\text{ MeV}$$

Deze waarde is alleen een grootte orde schatting, omdat er natuurlijk ook fotonen zijn met hogere energie. Verder is bij een temperatuur T de meest waarschijnlijke energie $E = 2.7kT$. De werkelijke GZK limiet ligt rond de $0.5\times 10^{14}\text{ MeV}$.