Opgave voor de finale:

Opgave: Hoe oud is het heelal, bestaat de donkere energie echt, en is het heelal oneindig?

In het college over de uitdijing van het heelal is het volgende aangetoond. Laat R de afstand zijn tussen 2 ver van elkaar verwijderde sterrenstelsels, en v de snelheid waarmee deze stelsels van elkaar af bewegen, ten gevolge van de uitdijing van het heelal. We nemen verder aan dat het heelal als homogeen beschouwd kan worden op de schalen waar we het over hebben, zodat de gemiddelde dichtheid ρ van het heelal overal hetzelfde is. Dan geldt geldt de volgende uitdrukking:

$$\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} + K. \tag{1}$$

Dit is de zg. Friedmann-vergelijking. In deze uitdrukking is G de gravitatieconstante, c de lichtsnelheid en Λ de zg. kosmologische constante (die een maat is voor de donkere energie; is er geen donkere energie dan is $\Lambda = 0$). K is een andere constante die uitsluitend afhangt van de intrinsieke kromming van het heelal.

a Beschouw nu eerst een heelal dat geen donkere energie en geen materie bevat (dus een leeg heelal). Toon aan dat in zo'n heelal de Hubble constante niet verandert met de tijd. Bereken de leeftijd van dit heelal, gebruik makend van het feit dat de Hubble constante $67.8\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ bedraagt, en dat $1\,\mathrm{Mpc}$ (megaparsec) overeenkomt met $3.084 \cdot 10^{19}$ km.

   Oplossing: Uit de Hubble wet volgt dat $H_0 = v/R$. Invullen in de Friedmann vergelijking geeft $H_0 = \sqrt{K}$ wat een constante is. De leeftijd van dit heelal is $1/H_0 = 4.55 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 14.4$ miljard jaar.

b Een leeg heelal is natuurlijk niet realistisch. We beschouwen daarom als volgende stap een heelal met materie (dus $\rho > 0$) maar zonder donkere energie, en zonder intrinsieke kromming ($K = 0$). In zo'n heelal geldt dat $R = At^{2/3}$, waarin A een constante is. Bewijs (door substitie in de Friedmann vergelijking) dat dit zo is, en toon aan dat A inderdaad een constante is. Bewijs nu dat de leeftijd van dit heelal precies $2/3$ is van de leeftijd van het heelal in het vorige onderdeel. Wat is deze leeftijd?

   Oplossing: Bedenk eerst $M = (4/3)\pi R^3\rho$, waarbij M de massa is binnen een volume met straal R en dichtheid ρ. M is constant (er wordt geen materie gecreëerd of vernietigd), door de uitdijing van het heelal (toenemende R) neemt alleen ρ af. Invullen in de Friedmann vergelijking levert $Rv^2 = 2GM$. Verder betekent $R = At^{2/3}$ dat $v = (2/3)At^{-1/3}$. Dit invullen levert $A^3 = (9/2)GM$ dus A is constant. De Hubble constante is $H_0 = v/R$ en invullen van de uitdrukkingen voor R en v levert $H_0 = 2/(3t)$. De leeftijd van het heelal is dus $t_0 = 2/(3H_0)$ wat precies $2/3$ is van de waarde in het vorige onderdeel, oftewel 9.6 miljard jaar.

c De leeftijd van de oudste sterren is ongeveer 13.2 miljard jaar. Vergelijk dit met de in het vorige onderdeel afgeleide leeftijd. Wat concludeer je over de donkere energie (neem aan $K = 0$)?

   Oplossing: De leeftijd van het heelal uit het vorige onderdeel is veel korter dan de leeftijd van de oudste sterren. Dit kan dus niet het juiste heelalmodel zijn. Het verwaarlozen van de donkere energie is dus niet gerechtvaardigd. Met donkere energie versnelt de uitdijing van het heelal, die uitdijing was vroeger dus langzamer. Dit leidt tot een hogere leeftijd, in overeenstemming met de ondergrens van 13.2 miljard jaar.

d Uit waarnemingen blijkt dat naar alle waarschijnlijkheid het heelal spatieel vlak is (dus niet gekromd). Een veel gemaakte fout is dat hieruit wordt geconcludeerd dat het heelal oneindig groot is. Leg uit waarom je deze conclusie niet zomaar mag trekken.

   Oplossing: Een spatieel vlak (niet gekromd) heelal betekent uitsluitend dat de geometrie Euclidisch is (som van de hoeken van een driehoek is 180 graden). Maar dat betekent niet dat het heelal oneindig moet zijn. Een 3-torus heeft ook overal een Euclidische geometrie, maar is wel eindig (het 2-dimensionale analogon is een 2-torus of zwemband-configuratie in een 3-dimensionale ruimte; overal op het oppervlak van de torus is de geometrie Euclidisch, maar de torus is wel eindig.)