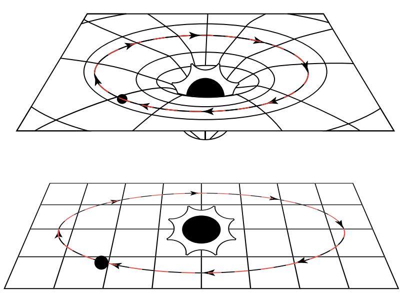
De centrale rol van de Newtonpotentiaal

In dit artikel wordt beschreven hoe Newtons zwaartekrachttheorie verkregen kan worden door naar de onderliggende symmetrieën te kijken. Het ijken van deze zogenoemde Bargmannsymmetrieën levert de zogenoemde Newton-Cartanformulering op, een theorie waarin Newtonse zwaartekracht als gekromde ruimtetijd wordt beschreven. Toepassingen en uitbreidingen hiervan worden ook kort aangestipt. Roel Andringa

Newton en Einstein

Het is al weer een tijdje geleden: in 1687 kwam Newton met zijn *Principia*, inclusief zwaartekrachttheorie. Deze theorie maakt deel uit van zijn mechanica waarmee Newton Keplers wetten kon afleiden en zo de beweging kon beschrijven van vallende appels tot vallende sterren. De ruimte waarin dit schouwspel zich afspeelt was volgens Newton een soort vlakke, onzichtbare container en de tijd een absolute parameter. Samen vormt dit toneel een structuur die we hier als de Newtonse ruimtetijd bestempelen. In deze ruimtetijd zijn er zogenoemde inertiaalwaarnemers die per definitie geen krachten ervaren en volgens Newtons tweede wet daarom in een rechte lijn door de Newtonse ruimte(tijd) bewegen.

Maar na twee eeuwen bleek Newtons theorie toch onvolledig en werd daarom in 1916 door Einstein omvergegooid door zijn algemene relativiteitstheorie. Hierin wordt Newtons onzichtbare zwaartekrachtarm tussen massa's vervangen door ruimtetijdkromming veroorzaakt door energie en impuls. Einstein maakte dankbaar gebruik van zijn equivalentieprincipe, dat stelt dat in kleine tijd- en ruimtestukjes een zwaartekrachtveld niet is te onderscheiden van een versnelling. Hiermee kon hij zwaartekracht beschrijven als de kromming van ruimtetijd, aangezien kromming ook iets is dat alleen op globale schaal merkbaar is. Een belangrijke eis was wel dat Einsteins theorie die van Newton omvat. En dat is zo: laat deeltjes langzaam bewegen ten opzichte van de lichtsnelheid, laat zwaartekracht bovendien zwak en statisch zijn, en Einsteins theorie geeft weer de vertrouwde theorie van Newton. Deze Newtonse limiet van de Einsteinvergelijkingen wordt in vrijwel elk boek over algemene relativiteit besproken. Maar de vraag wat er in deze limiet met Einsteins meetkundige beschrijving gebeurt, wordt op een enkele uitzondering na achterwege gelaten. Waar is die schitterende meetkunde opeens gebleven?



Figuur 1 Dezelfde baan van een massa rond de zon op twee verschillende manieren beschreven: als geodeet (kortste lijn) in de gekromde Newtonse ruimtetijd (boven) en als gekromde lijn in de vlakke ruimte (onder).

Iedereen is gelijk!

Het antwoord hierop volgde al snel na Einsteins publicatie. Een belangrijk verschil tussen Einsteins theorie en die van Newton is namelijk algemene covariantie. Voor de Newtonse zwaartekracht is er een speciale groep waarnemers die met elkaar verbonden zijn via Galileitransformaties (zie kader *De Bargmann-algebra*) plus lineaire versnellingen, die we ook wel Milnetransformaties noemen. Deze waarnemers zijn equivalent: ze zullen meten dat Newtons tweede wet en de Poissonvergelijking voor het zwaartekrachtveld dezelfde wiskundige vorm hebben. Maar ga je bijvoorbeeld naar draaiende waarnemers, dan duiken schijnkrachten op: de centrifugaal- en corioliskracht. Wiskundig zeggen we dat Newtons tweede wet voor zwaartekracht en de Poissonvergelijking alleen covariant transformeren onder Milnetransformaties. In Einsteins theorie daarentegen hebben de relativistische analogieën van Newtons tweede wet en Poissonvergelijking, namelijk de geodetenvergelijking en de Einsteinvergelijking, dezelfde vorm voor alle waarnemers. Al deze waarnemers worden verbonden via algemene coördinatentransformaties, die daarmee de Milnetransformaties vervangen. De ultieme waarnemersdemocratie! Vol enthousiasme meende Einstein vervolgens dat algemene

covariantie een unieke eigenschap van zijn theorie was, maar Einsteins collega Erich Kretschmann floot hem terug [1]. Kretschmann beargumenteerde dat algemene covariantie helemaal niet zo bijzonder was als Einstein dacht en beweerde dat Newtons zwaartekrachttheorie waarschijnlijk ook wel algemeen-covariant gemaakt kon worden. De Franse wiskundige Elie Cartan liet dit vervolgens in 1923 expliciet zien [2], waarmee Einsteins verwarring omtrent algemene covariantie compleet was. Cartans theorie noemen we nu Newton-Cartan en is empirisch gezien exact gelijk aan Newtons zwaartekrachttheorie.
Newtons tweede wet wordt in de Newton-Cartanformulering als geodetenvergelijking in de Newtonse ruimtetijd geschreven en de Poissonvergelijking als een algemeen-covariante veldvergelijking. Dit is dus een meetkundige vorm van Newtons tweede wet plus Poissonvergelijking die voor alle waarnemers dezelfde vorm heeft. Inertiaalkrachten in Newtons theorie, veroorzaakt door bijvoorbeeld lineaire versnellingen of rotaties, kunnen nu ook meetkundig worden opgevat.

Appeltje, ijkje

Maar er is ook nog een totaal andere manier om zwaartekracht te begrijpen, namelijk als ijktheorie. In het standaardmodel gebruik je de ijkprocedure om interacties tussen deeltjes te introduceren. Dit doe je door globale symmetrieën van de bijbehorende quantumvelden te promoten naar lokale symmetrieën.
Transformaties die eerst in elk ruimtetijdpunt gelijk waren mogen dus na het ijken in elk punt verschillend zijn! Deze symmetrieën beschrijven transformaties in abstracte, interne ruimtes waar de velden hun waardes aannemen (de cirkeltjes in figuur 2). Om te compenseren voor de lokale symmetrie heb je vervolgens ijkvelden nodig, die op hun beurt de interacties tussen je velden overbrengen.
Om zwaartekracht te beschrijven moet je deze procedure toepassen op de globale symmetrieën van de ruimtetijd. Relativistisch zijn dit de zogenoemde Poincaré-symmetrieën, bestaande uit translaties, rotaties en boosts, waarbij een boost je via een constante snelheid naar een andere waarnemer brengt. Wanneer deze Poincaré-symmetrieën worden geijkt levert dat de algemene relativiteitstheorie op, waarbij de lokale translaties de plaats van de algemene coördinatentransformaties innemen [3]. Nadat ik gelezen had over Newton-Cartantheorie vroegen mijn promotor en ik ons af of dit ijkproces ook niet-relativistisch uitgevoerd kon worden en of dit Newton-Cartan zou opleveren. Dat bleek zo te zijn en je kon er bovendien ook nog een heel proefschrift mee vullen [4]!

Galilei, Bargmann, ...

Het startpunt van de ijking is de actie

De Bargmann-algebra

Een niet-relativistisch deeltje met wereldlijn-parameter τ en ruimtetijdcoördinaten $\{t(\tau), x^i(\tau)\}$ wordt beschreven met de actie (over gelijke indices i, j, … wordt gesommeerd)

$$S[t,x] \equiv \int L d\tau = \frac{M}{2}\int \frac{\dot{x}^i \dot{x}_i}{\dot{t}} d\tau, \qquad (1)$$

waarbij de stip voor een τ-afgeleide staat. Deze actie is invariant onder Galileitransformaties. Deze bestaan uit respectievelijk de tijdstranslaties H, rotaties J, Galileiboosts B en ruimtetranslaties P op de coördinaten:

$\delta_H t = \varepsilon$,
$\delta_J x^i = \lambda^i{}_j x^j$ (waarbij $\lambda_j{}^i = -\lambda^i{}_j$),
$\delta_B x^i = v^i t$,
$\delta_P x^i = \xi^i$.

De infinitesimale parameters ε, $\lambda^i{}_j$, v^i en ξ^i zijn hierin constant. De actie (1) is ook invariant onder herparametrisaties van de wereldlijnparameter τ, wat de $\dot{t}$ in de noemer van vergelijking 1 verklaart. De bijbehorende energie en impuls van het deeltje worden gegeven door

$$p_0 = \frac{\delta L}{\delta \dot{t}} \text{ en } p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i}.$$

Wanneer de Lagrangiaan als een totale τ-afgeleide transformeert, $\delta L = \dot{\Theta}$, dan is de actie nog steeds invariant maar heeft de Noetherlading een extra term Θ nodig om behouden te blijven:

$$Q = p_0 \delta t + p_i \delta x^i - \Theta\,.$$

Dit laatste is het geval voor Galileiboosts:

$$\delta_B L = M\dot{x}^i v_i = \frac{d}{d\tau}(M x^i v_i) = \dot{\Theta}\,.$$

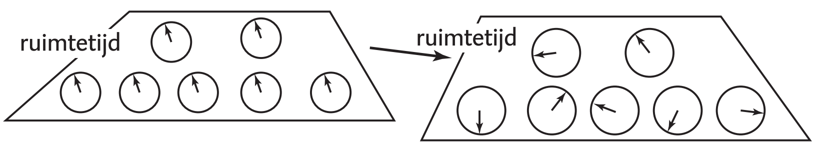
Ondanks dat ruimtetranslaties en Galileiboosts op de coördinaten commuteren,

$$[\delta_P, \delta_B] x^i = \delta_P(v^i t) - \delta_B(\xi^i) = 0 - 0 = 0$$

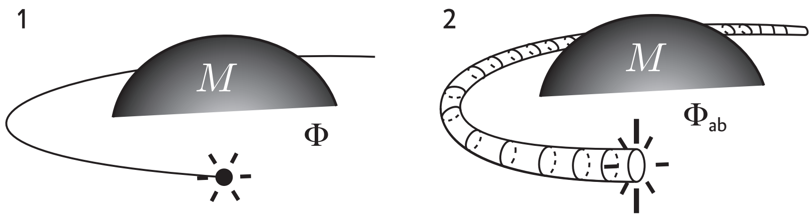
geldt vervolgens voor de Poissonhaakjes [9] van Q_B en Q_P dat

$$\{Q_P, Q_B\}_{\text{poisson}} = Z\,.$$

Dit levert een extra symmetriegenerator Z in de algebra op die met alle andere generatoren $\{H,J,B,P\}$ commuteert. De generatoren $\{Z,H,J,B,P\}$ samen vormen de Bargmann-algebra.



Figuur 2 Een indruk van hoe globale rotaties van een veld worden geijkt.



Figuur 3 1) Een deeltje in een Newtonpotentiaal Φ, en (2) een snaar in een snaarachtige Newtonpotentiaal Φ_{ab}.

van een vrij, niet-relativistisch deeltje (zie kader *De Bargmann-algebra*) met de bijbehorende Galileisymmetrieën. Emmy Noether heeft ons geleerd dat deze symmetrieën behouden stromen geven die we Noetherladingen noemen. Deze ladingen drukken bijvoorbeeld behoud van energie en impuls uit en vormen een algebra via de zogenoemde Poissonhaakjes [9]. Maar ons niet-relativistische deeltje heeft een verrassing in petto die zijn relativistische broertje niet heeft. Onder een Galileiboost is de actie namelijk wel invariant, maar de Lagrangiaan niet! Deze Lagrangiaan gaat naar een totale afgeleide die met onze randvoorwaarden nul wordt. Maar deze totale afgeleide werkt wel degelijk door in de Poissonhaakjes en levert een extra generator in de onderliggende algebra op. Deze extra generator, die ook wel centrale lading wordt genoemd, commuteert met alle andere generatoren en beschrijft volgens onze Poissonhaakjes niks anders dan de behouden massa van het deeltje. De centraal-uitgebreide Galilei-algebra kennen we als de Bargmann-algebra [5]. In de quantummechanica speelt deze algebra een belangrijke rol en is gerelateerd aan de vraag hoe De Broglie's relatie $\lambda = h/p$ opgaat als de golflengte λ in de golffunctie invariant is onder een Galileiboost, terwijl de impuls p dat niet is [6].

Roel Andringa (1984) promoveerde op 23 september 2016 aan het Van Swinderen Instituut (RUG) bij Eric Bergshoeff met het proefschrift Newton-Cartan gravity revisited. Momenteel geeft hij wiskunde op de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden en werkt hij aan een (semi-) populair-wetenschappelijk boek over quantumzwaartekracht.

roelandringa@hotmail.com

...Newton en Cartan

Behalve in de quantummechanica blijkt de centrale lading ook een sleutelrol te spelen in de Newtonse zwaartekracht. Je kunt namelijk alleen met deze centrale lading volledig analoog aan het relativistische geval een ijktheorie krijgen. Net zoals de Poincaré-algebra bevat de Bargmann-algebra translaties, die na ijken weer algemene coördinatentransformaties opleveren. Maar wanneer je nu zwaartekracht 'uitzet', krijg je de globale Bargmannsymmetrieën weer terug en de bijbehorende Newtonse ruimtetijd met de karakteristieke absolute tijd. De verkregen ijktheorie is daarom niets anders dan Newton-Cartan! Newtons zwaartekrachtpotentiaal blijkt in de ijktheorie voor inertiaalwaarnemers de tijdscomponent van het ijkveld te zijn dat bij de centrale lading hoort. Het centrale ijkveld koppelt daarbij op dezelfde manier aan ons deeltje als een elektromagnetisch ijkveld en heeft dezelfde bijbehorende ijktransformaties.

Waarom terug naar Newton?

Met het ijken van de Bargmann-algebra kun je dus een oude formulering van een nog oudere theorie afleiden. Maar waarom zou je dat willen? Newtons zwaartekrachttheorie kan immers allerlei relativistische fenomenen niet beschrijven, zoals de afbuiging van licht, zwaartekrachtgolven, tijdsdilatie, de juiste hoeveelheid precessie van Mercurius en zwarte gaten. Toch zijn er verschillende redenen om geïnteresseerd te zijn. Feynman beschrijft er eentje in zijn lezingenserie *The character of physical law*, waarin hij het belang van verschillende formuleringen benadrukt in het vinden van nieuwe principes: "Elke waardige natuurkundige die iets voorstelt kent zes of zeven verschillende representaties van exact dezelfde fysica." Bovendien kan onze alledaagse realiteit vaak goed beschreven worden met Newtonse natuurkunde en hebben we helemaal geen algemene relativiteit nodig.

De herleving van Newton-Cartan

Een belangrijke reden waarom niet-relativistische zwaartekracht weer onder de aandacht komt, is holografie. Het holografische principe relateert een quantumtheorie met zwaartekracht aan een quantumtheorie zonder zwaartekracht. Het gaat hier om een nogal ingewikkelde dualiteit die alleen in specifieke limietgevallen voor een handvol snaartheoretische scenario's is aangetoond. Om deze dualiteit verder te testen probeert men daarom zwaartekracht 'dualen' op te schrijven voor systemen waaraan je kunt meten. De leidraad hiervoor zijn symmetrieën, en veel van deze systemen zijn niet-relativistisch. De zwaartekrachtduaal van een groep niet-relativistische theorieën met extra schaalsymmetrie blijkt dan een Newton-Cartantheorie te zijn voor snaren in plaats van deeltjes [7]. En deze theorie hebben we met de ijkprocedure kunnen afleiden door een niet-relativistische snaar met snaarachtige Bargmannsymmetrieën te nemen. De ijkprocedure levert dan de bijbehorende Newton-Cartantheorie op waarbij de Newtonpotentiaal een matrix ϕ_{ab} van twee bij twee wordt. Zo weet je dus hoe een snaar Newtonse zwaartekracht ervaart. Daarnaast kan een kosmologische constante worden toegevoegd en kan de Newton-Cartanformulering ook supersymmetrisch worden gemaakt. Twee eigenschappen die voor holografie belangrijk zijn, maar elk ook interessant op zichzelf.

Oude fiets

De reden waarom Newton-Cartan echter mijn aandacht trok, was vooral omdat het me dwong na te denken over concepten die ik meende prima te begrijpen, zoals algemene covariantie, de Newtonse limiet en niet-relativistische deeltjes. Newton-Cartan heeft mijn begrip hiervan behoorlijk aangescherpt. Toch komt de theorie nauwelijks in tekstboeken terug; een uitzondering is de klassieker [8]. Dat is jammer, want ondanks de ouderdom heeft de theorie naast interessante toepassingen ook grote didactische waarde. En op een oude fiets moet je het tenslotte toch vaak leren.

Referenties

1 W. Isaacson, *Einstein: de biografie*, (2007) Nieuw Amsterdam.
2 E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **40** (1923) 325-412.
3 S.W. MacDowell en F. Mansouri, *Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity, Phys. Rev. Lett.* **38** (1977), 739.
4 R. Andringa, *Newton-Cartan theory revisited*, proefschrift RUG (2016).
5 V. Bargmann, *On Unitary Ray Representations of Continuous Groups, Annals of Mathematics Second Series*, **59** 1 (1954) 1-46.
6 Zie bijvoorbeeld L.E. Ballentine, *Quantum mechanics: A modern development* (1998) World Scientific Publishing Company.
7 A. Bagchi en R. Gopakumar, *Galilean Conformal Algebras and AdS/CFT, Journal of High Energy Physics* **7** (2009) 037.
8 C.W. Misner, K.S. Thorne en J.A.Wheeler, *Gravitation* (1973) W.H. Freeman and Company.
9 Zie bijvoorbeeld R.A. Matzner en L.C. Sheply, *Classical Mechanics*, (1991) Prentice Hall.

Nieuws

Stikstofijsjes onder de Dom: beleef de natuurkunde tijdens de Utrecht Physics Challenge

Heel Nederland is uitgenodigd om op 6 mei 2017 de natuurkunde in te duiken tijdens een gloednieuw evenement: De Utrecht Physics Challenge. Met het thema *Physics for the Future* verdiept een breed publiek zich in alle facetten van de natuurkunde. Hoe staat het met de ontwikkeling van de quantumcomputer? Komen er Marskolonies? En hoe snel gaan die klimaatveranderingen eigenlijk? Bezoekers van jong tot oud en van leek tot expert zijn van harte welkom om antwoord te vinden op al hun vragen en elkaar te ontmoeten tijdens deze bijzondere dag. Het evenement wordt georganiseerd door het Departement Natuurkunde van de Universiteit Utrecht en studievereniging A-Eskwadraat, de vereniging die enkele jaren geleden Stephen Hawking naar Utrecht haalde.

De Utrecht Physics Challenge bestaat uit twee onderdelen: het Physics Festival en de Student Challenge. Het Physics Festival is toegankelijk en interessant voor iedereen. Het Domplein wordt ingericht als een echt natuurkundefestival vol demonstraties, spellen, experimenten, foodtrucks en spectaculaire shows, zoals de bekende Bonn Physics Show en het nieuwe concept Experts on Stage, waarbij het publiek al haar vragen kan stellen aan een team van professionals. Geïnteresseerde scholier en toevallige voorbijganger, nieuwsgierig gezin of doorgewinterde natuurkundige: iedereen kan zich hier zeker een paar uur vermaken en zich laten verbazen door de wonderen van de natuurkunde.

Terwijl het Physics Festival zich buiten op het Domplein voltrekt, kunnen studenten van alle niveaus en vanuit heel Nederland elkaar in het aanliggende Academiegebouw uitdagen tijdens een spannend natuurkundespel: de Student Challenge. Deze wedstrijd draait voor het merendeel om het zo goed mogelijk begrijpen van een groot aantal lezingen van stuk voor stuk toonaangevende natuurkundigen, zoals Laura Greene, Clint Sprott en Michael Ghil. Via een interactieve smartphone-app, speciaal ontwikkeld voor de Utrecht Physics Challenge, kunnen deelnemers punten verdienen door quizvragen te beantwoorden die horen bij de lezingen. Ook grappige *achievements*, mysterieuze raadsels en opdrachten bij het Physics Festival leveren punten op. Degene die aan het eind van de dag het hoogste level heeft gehaald, wint een mooie prijs!

Kan jij ook niet wachten om stikstofijsjes te eten onder de Dom? Kom op 6 mei naar Utrecht en beleef de natuurkunde samen met collega's, studenten en het algemene publiek!

Meer informatie is te vinden op: www.utrechtphysicschallenge.com. of vind ons op www.facebook.com/utrechtphysicschallenge.

Tot dan!

Ruward Mulder en Richelle Boone, namens de organisatie van Utrecht Physics Challenge